9 1°BAC CNyS

CÓNICAS

lugar geométrico

Conjunto de puntos que verifican una cierta propiedad.

La forma de hallar la ecuación de un l.g. es la siguiente:

1. Llamar P(x, y) a los puntos del l.g.
2. Imponerles las condiciones que tienen que cumplir.
3. Simplificar o resolver la ecuación resultante.

Ejemplo:

1. Hallar la mediatriz del segmento A(–3, 4), B(1, 0).
2. Bisectriz de 4x+3y–5=0 y 3x+4y–2=0.
3. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro C(1, 2) y radio 3. (dibujarla primero)

¿Quiénes serían los polos norte, sur, este y oeste de la circunferencia anterior?

¿Quiénes son sus cortes con los ejes de coordenadas?

1. LA CIRCUNFERENCIA

Lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo llamado centro *O* una longitud fija llamada radio *r*.

$$c = \{P(x, y) / d(P, O) = r\}$$

Elementos: O(a, b) y radio r.

Su ecuación sería:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \to x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \; Donde \begin{cases} A = -2a \\ B = -2b \\ C = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$$

Ejemplos (Elegir)

1. Circunferencia de centro el origen y pasa por P(3, 4)
2. Centro de la circunferencia y su radio: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
3. Hallar la circunferencia de centro C(2, 3) y radio 4. Calcular los puntos de algunas abscisas. Por ejemplo, x = 5
4. Circunferencia que pasa por los puntos A(0, 0); B(2, 0) y C(1, 1)

Ejercicios 2 (Libro)

Identificar las circunferencias, su centro y su radio:

$x^2 + y^2 - 4x + 6 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y - 12 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

RECTA-CIRCUNFERENCIA

Son los dos instrumentos básicos del dibujo técnico y también del geómetra.

Comparando el radio r de la circunferencia con d=d(O, r)

Las posiciones relativas de recta-circunferencia son claras:

1. Exterior. d>r

2. Tangente. d=r
3. Secante. d<r

Los puntos comunes los hallaremos resolviendo el sistema resultante.

Ejercicios (Libro)

Estudiar la posición relativa de la recta respecto de las circunferencias respectivamente:

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

$3x - 4y - 26 = 0$

$5x - 8y + 60 = 0$

$3x - 4y - 1 = 0$

Hallar los puntos de corte en los casos en que sea posible.

Ejemplos (Elegir)

Posición de

$$2x + y - 3 = 0 \textit{ respecto de } x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$$
$$x + 2y - 3 = 0 \textit{ respecto de } x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$$

PUNTO INTERIOR Y EXTERIOR. POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Pot (P, c) = $d^2 - r^2 = (p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 - r^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2ap_1 - 2bp_2 + C$.

Es decir, sustituyendo el punto en la ecuación de la circunferencia.

Clasificación de los puntos del plano respecto de la circunferencia

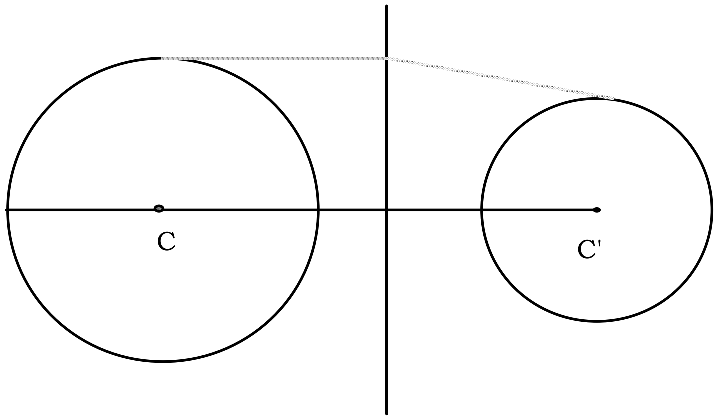
Pot > 0 *Exteriores*
Pot = 0 *Circunferencia*
Pot < 0 Interiores

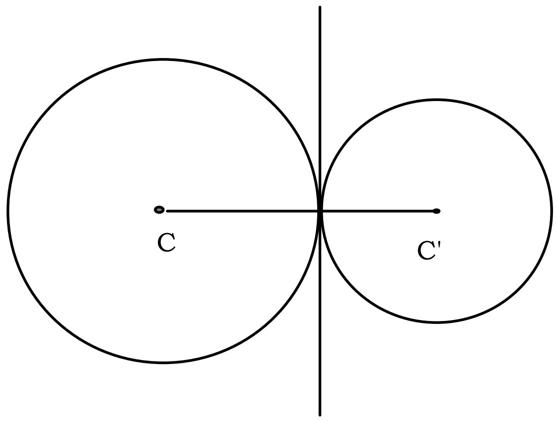
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2. \textit{ Exterior}; \ (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2. \textit{ Interior}$$

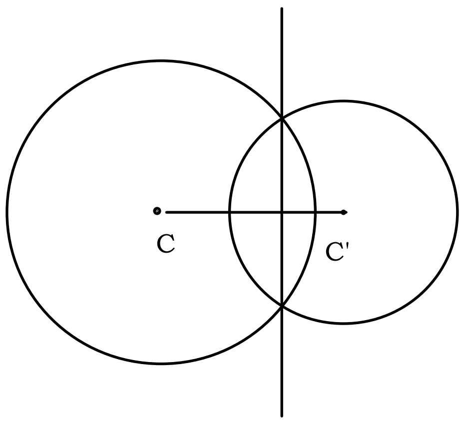
EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

El l.g. de los puntos equipotentes respecto de las circunferencias.
Es decir,
P(x, y) / Pot(P, c) = Pot(P, c′)
Su ecuación se deduce fácilmente:
(A – A′) x + (B– B′) y + C = 0

Como era de esperar según la definición resulta una recta. Además se verifica también de forma sencilla que es perpendicular a la que une los centros de las circunferencias.







POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS. OPTATIVO

Secantes, tangentes, interior, exterior.

Se puede hacer estudio sin necesidad de resolver el sistema comparando la distancia entre los centros con respecto a los radios de ambas.

Para hallar los puntos comunes hemos de aplicar primero una reducción y luego una sustitución.

Ejemplo:

Determinar la posición relativa de las siguientes circunferencias y sus puntos comunes si los tuvieren:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2-6x-6y+9=0 \end{cases}$$

2. LAS CÓNICAS

Un poco de historia. Basado en libro de Boyer

Una de las pocas obras conservadas de Apolonio, aunque una de sus obras fundamentales, es las *Cónicas*. De todas formas sólo se conserva en el original griego la mitad, los cuatro primeros de sus ocho libros; pero por suerte un matemático árabe, **Thabit ibn Qurra**, tradujo los tres libros siguientes al árabe antes de que despareciera su versión griega, y esta traducción se ha conservado. En 1710, **Edmund Halley** publicó una traducción al latín de los siete libros, y desde entonces se han publicado muchas versiones en lenguas modernas.

Las secciones cónicas se conocían ya desde hacía más o menos un siglo y medio cuando **Apolonio** compuso su famosos tratado sobre estas curvas, y durante este intervalo por lo menos dos veces se escribieron tratados generales sobre el tema, debidos a **Aristeo** y a **Euclides,** pero de la misma manera que los *Elementos de Euclides* habían eclipsado a todos los textos elementales anteriores, así también en el nivel más avanzado de la teoría de las secciones cónicas, las *Cónicas de Apolonio* desplazaron a todos sus rivales en este campo, incluyendo las *Cónicas de Euclides*, y al parecer no se hizo ningún otro intento de mejorarlas en la antigüedad. Si la supervivencia es en algún sentido una medida de la calidad, entonces los *Elementos de Euclides* y las *Cónicas de Apolonio* fueron sin duda las mejores obras en su género en la matemática antigua.

El *libro I de las Cónicas* comienza con una exposición de los motivos para escribir la obra. Así sabemos que mientras Apolonio estaba en Alejandría fue visitado por un geómetra llamado **Naucrates**, y fue a petición de este último que Apolonio escribió un apresurado borrador de las Cónicas en ocho libros. Más tarde, ya en Pérgamo, Apolonio se tomó el tiempo necesario para pulir cuidadosamente estos libros, uno por uno, lo que explica el hecho de que los Libros IV y VII comiencen con dedicatorias y agradecimientos al rey Atalo de Pérgamo. Los cuatro primeros libros los describe el autor como constituyendo una introducción elemental, y se supone generalmente que la mayor parte del material que contienen había aparecido publicado ya en anteriores tratados sobre cónicas. Sin embargo, Apolonio nos dice expresamente que algunos de los teoremas contenidos en el Libro III son suyos propios, ya que Euclides no había dado un tratamiento completo de los lugares geométricos que se consideran en él. Apolonio afirma que los cuatro últimos libros son extensiones de la materia que van más allá de lo esencial, y efectivamente, en ellos la teoría avanza en direcciones más especializadas.

Anteriormente a Apolonio la elipse, la parábola y la hipérbola se obtienen como secciones por medio de un plano de tres tipos de conos circulares rectos distintos según el ángulo en el vértice fuese agudo, recto u obtuso. Parece ser que Apolonio demostró por primera y de una manera sistemática que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono; éste era un paso muy importante en el proceso de unificar los tres tipos de curvas en cuestión. Otra generalización importante se llevó a cabo cuando Apolonio demostró que el cono no necesita ser un cono recto, es decir, tal que su eje sea perpendicular al plano de se base circular, sino que puede igualmente tomarse de entrada un cono circular oblicuo o escaleno. Si **Eutocio**, en sus comentarios sobre las Cónicas, estaba bien

informado, podemos asegurar que Apolonio fue el primer geómetra que demostró que las propiedades de estas curvas son las mismas, se obtengan como secciones de conos oblicuos o de conos rectos. Por último, Apolonio llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de dos hojas (par de conos orientados en sentido opuesto, con vértices coincidentes y ejes sobre la misma recta). De hecho, Apolonio da la misma definición de cono circular que se utiliza actualmente:

Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble.

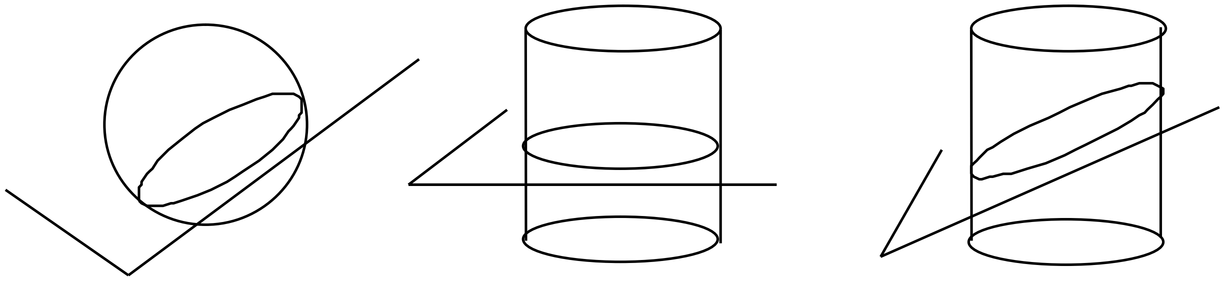
Este cambio en el punto de vista convierte a la hipérbola en la curva de dos ramas tal como la conocemos hoy: Hasta entonces los geómetras solían hablar de "las dos hipérbolas" en vez de "las dos ramas" de una hipérbola única, pero en cualquier caso el carácter dual de la curva fue reconocido claramente a partir de Apolonio.

En Grecia se apoyaba mucho la investigación matemática en la geometría. El Álgebra era desconocida. En algunos problemas no se acertaba con la solución a partir de la recta y la circunferencia. Por ello se empezaron a buscar e investigar nuevas curvas.

Preguntar que curvas vemos en la naturaleza.

Es claro que una forma de conseguirlas es hacer secciones de un sólido. Los sólidos más sencillos son la esfera, el cono y el cilindro (que no sean poliedros claro).

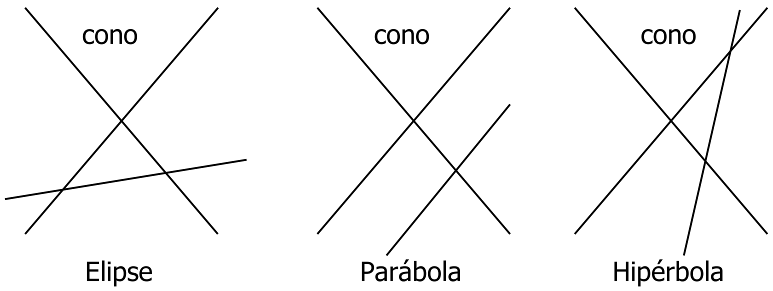
Las secciones de una esfera siempre me dan circunferencias:



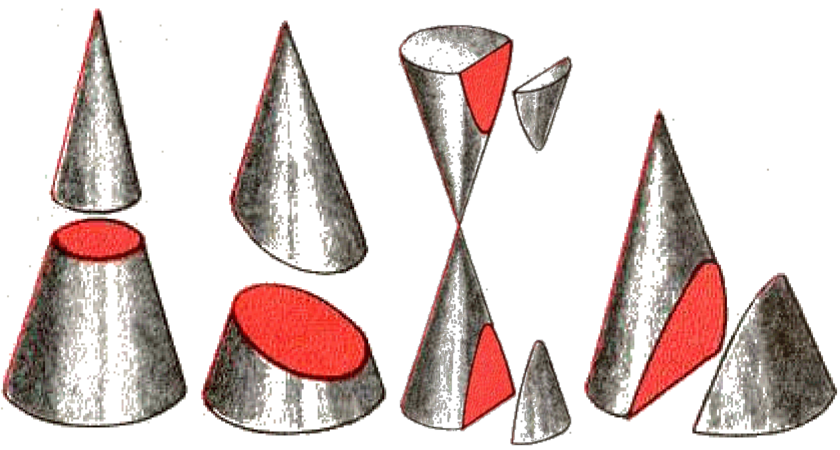
Las de un cilindro me pueden dar circunferencias o elipses.

Fue Menecmo, matemático griego, quien descubrió estas curvas alrededor del 350 a.C. buscando resolver con ellas un problema matemático. El nombre de **cónicas** hace alusión a la forma de generarse en el espacio.

Una vez que tenemos claro las posibilidades que hay dependiendo del ángulo que forme el plano de corte con el eje del cono y el ángulo que formen las generatrices con él.



Vamos a ver sólo las ecuaciones reducidas de las cónicas puesto que sirven para comentar sus características más notables. También por simplificación.



3. ELIPSE

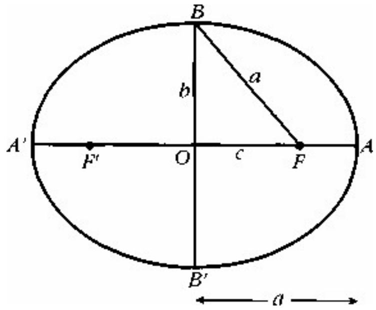
Se puede dibujar en la pizarra con ayuda y desde el dibujo ir definiendo todos sus elementos.

Elipse significa etimológicamente "insuficiente". Hace referencia a que la inclinación del plano que genera la curva es inferior al de la generatriz del cono.

Como lugar geométrico se ha descubierto que se puede definir así:

$$e = \{P(x,y) / d(P,F) + d(P,F') = k\}$$

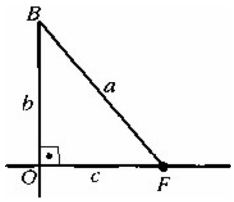
Hacer dibujo en la pizarra con voluntarios.



O. Centro de la elipse.
a. Semieje mayor.
b. Semieje menor.
c. Semidistancia focal.
F(c, 0) y F'(−c, 0). Focos de la elipse.
K = 2a
No es difícil obtener la fórmula:

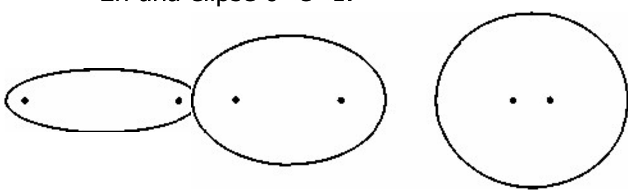
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La constante de la elipse es 2a. Y la relación fundamental que se cumple es $a^2=b^2+c^2$.



Se llama excentricidad al valor: $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$. Nos da una medida de lo separado que está el foco del centro de la elipse, que es el punto O.

En una elipse 0<e<1.



Observar cómo la circunferencia sería una elipse se excentricidad 0. Es decir, es un caso límite y la ecuación que resultaría sería la de la circunferencia: $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1; x^2+y^2=r^2$

EJEMPLOS:

1. Hallar los elementos característicos (semiejes, focos y excentricidad) de la elipse de focos F(4,0) y F'(−4,0) y constante k=10.

Halla su ecuación reducida.

Dibújala aproximadamente.

2. Una elipse tiene sus focos en los puntos F(5,0) y F'(−5,0) y su constante es k=26. Halla sus elementos característicos, la ecuación reducida de ella y su excentricidad.

Represéntala.

ELIPSE CON FOCOS EN EL EJE Y

Lo único a tener en cuenta es que el eje mayor ahora es el que está en el eje Y. A efectos de hallar la excentricidad, por ejemplo.

En este caso k = 2b y los focos F'(0,−c) y F(0, c). También tendremos que $b^2=a^2+c^2$; y, por último, que e=c/b

ELIPSE CON CENTRO (α, β)

La ecuación en este caso quedaría así:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

EJEMPLOS

1. Representa y di su excentricidad: $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

2. Representa y di su excentricidad: $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-7)^2}{64}=1$

No estudiamos la ecuación de elipses giradas…

4. HIPÉRBOLA

Se pueden dibujar en la pizarra dos focos a distancia 4 e ir trazando puntos para k = 3. Después la clave está en trazar las asíntotas (llevando 'c' sobre la perpendicular por uno de los puntos del eje) y desde ahí empezar a definir todos sus elementos.

Hipérbola significa etimológicamente "exceso". En este caso la inclinación del plano de corte excede al de la generatriz del cono.

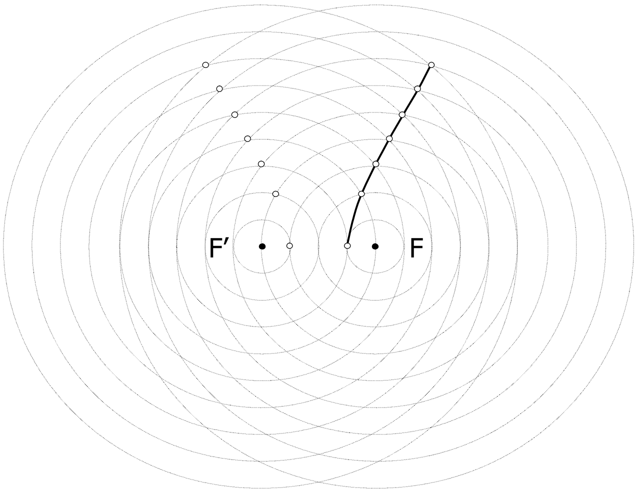
La figura que resulta tiene dos ramas.

Como lugar geométrico se ha descubierto una definición también sencilla:

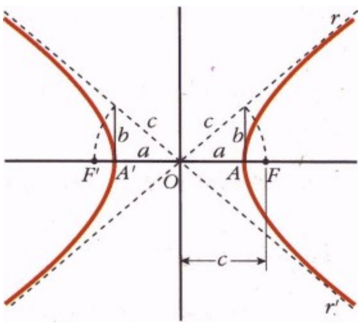
$$h=\{P(x,y)\,/\,|d(P,F)-d(P,F')|=k\}$$

EJEMPLO

Vamos a completar la siguiente hipérbola que se caracteriza porque la diferencia a los focos es de 2.



Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos fijos, llamados focos, es constante.



Aquí los elementos son:
O. Centro de la hipérbola.
c. Semidistancia focal.

a. Semieje −sólo tiene uno−

r, r’. Asíntotas.

F(c, 0) y F’(−c, 0). Focos.

k=2a.

La relación en este caso es $c^2 = a^2 + b^2$

Donde el significado de “b” ahora es que está relacionado con la pendiente de las asíntotas. A saber,

$\frac{b}{a}$ y $\frac{-b}{a}$

La excentricidad en este caso sigue siendo: $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

Su valor ahora es 1<e.

Y lo que nos da es la menor −cerca de 1− o mayor −infinito− apertura de las ramas de la hipérbola.

Después de hacer las operaciones pertinentes la ecuación reducida que resulta para la hipérbola es la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

HIPÉRBOLA CON FOCOS EN EL EJE Y

La ecuación que resulta ahora es: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Los focos son ahora F(0, c) y F’(0, −c)

También e=c/b

HIPÉRBOLA CON CENTRO (α, β)

Las ecuaciones en este caso quedarían así:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$

EJEMPLOS

1. Representa las siguientes hipérbolas:

$\bullet \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ $\bullet -\frac{(x-3)^2}{25} + y^2 = 1$ $\bullet \frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$ $\bullet\ 4y^2 - x^2 = 4$

2. Representa:

$\bullet \frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ $\bullet \frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

5. PARÁBOLA

Parábola está emparentada con paralelo. Por la inclinación del plano de sección. En este caso la inclinación del plano de corte es igual al de la generatriz del cono.

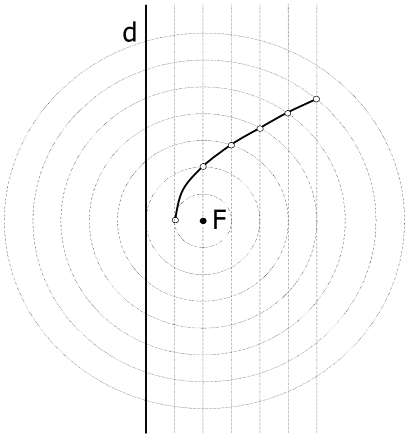
La figura que resulta tiene una única rama.

Como lugar geométrico se ha descubierto una definición también sencilla. Ahora aparecen un foco y una recta llamada directriz.

$$p = \{P(x, y) / d(P, F) = d(P, r)\}$$

EJEMPLO

Vamos a completar la siguiente parábola que se caracteriza el foco y la directriz dadas.



Es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo F y una recta d.

El parámetro de la parábola es la distancia entre el foco y la directriz que llamaremos p. Según esto:

F(p/2, 0). Foco.

d: x = −p/2. Directriz.

Después de hacer las operaciones pertinentes la ecuación reducida que resulta para la hipérbola es la siguiente:

$$y^2 = 2px$$

Con el foco en el eje Y y la directriz paralela al eje X la ecuación reducida resulta así:

$$x^2 = 2py \rightarrow y = kx^2$$

PARÁBOLAS NO CENTRADAS EN EL ORIGEN

Tendremos como ecuación:

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$$

EJEMPLOS

1. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco F(2, 0) y directriz x=−2
2. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco F(1’5; 0) y directriz x=−1’5.
3. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco F(0, 2) y directriz y=−2.